VIII SIMPOSIO INTERNACIONAL DE ACTUARÍA

ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE ACTUARIOS

INSURANCE AND ACTUARIAL ENGINEERING

Prime Re Solutions

Análisis de dependencias con cópulas

Prime Re Academy

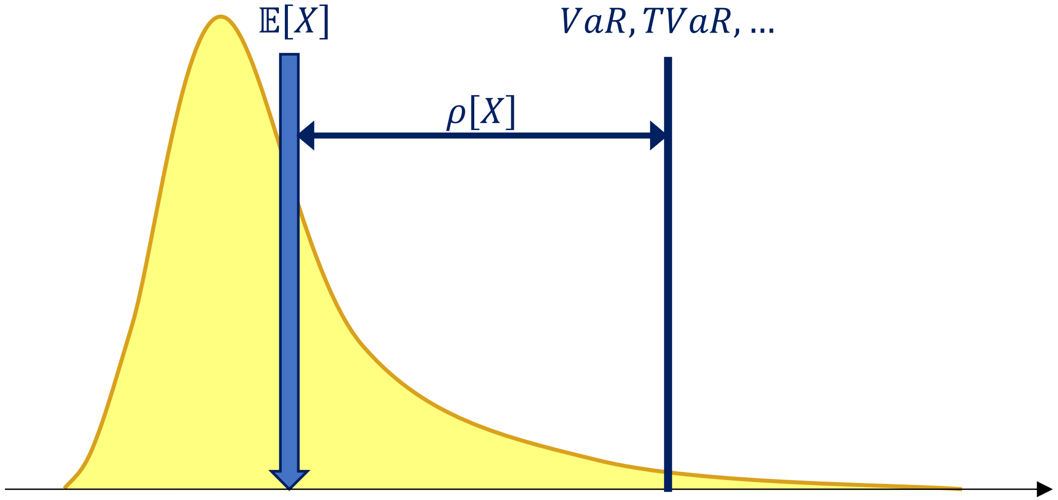
Agenda

- Introducción
- Risk aggregation con Cópulas
- Capital allocation

¿Qué es el riesgo?

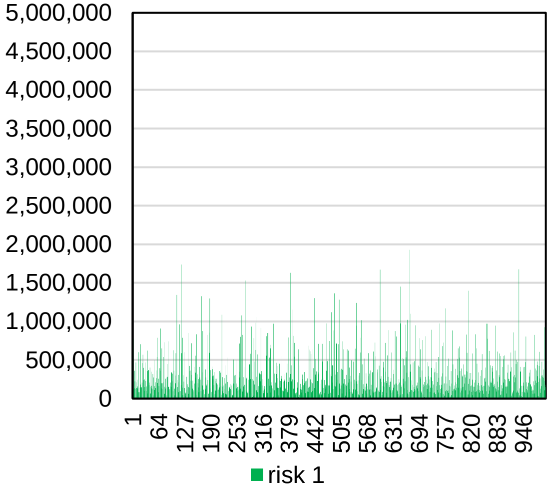
- Dos enfoques corporativos
  - Contable: solo se puede registrar una cifra por ítem
  - Actuarial: cada ítem es una variable aleatoria

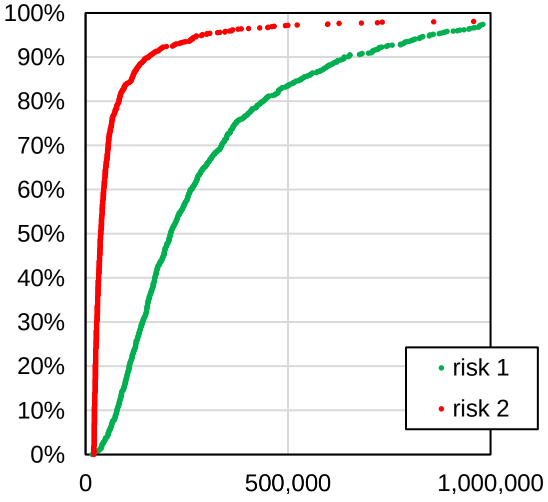
- Riesgo $= \rho[X] =$ desviación de lo esperado $\mathbb{E}[X]$



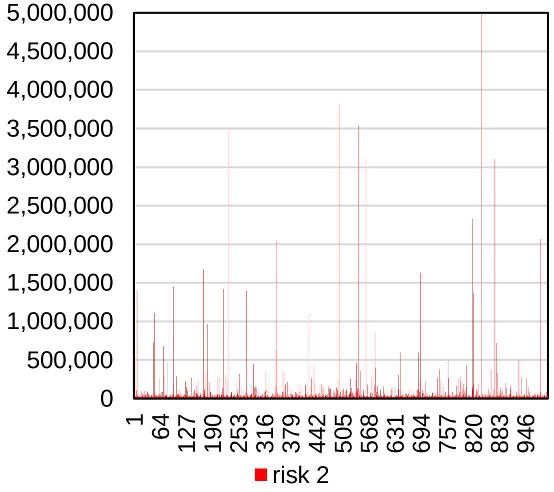
Modelación de riesgos

Riesgo 1



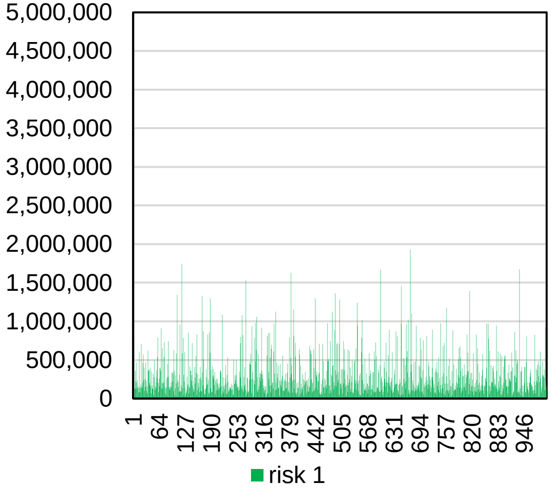


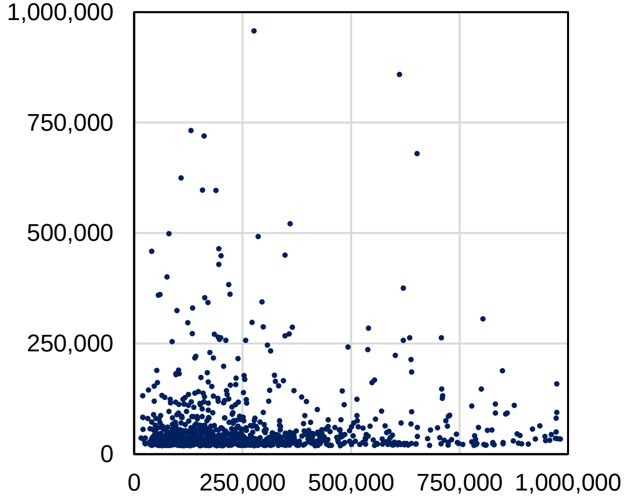
Riesgo 2



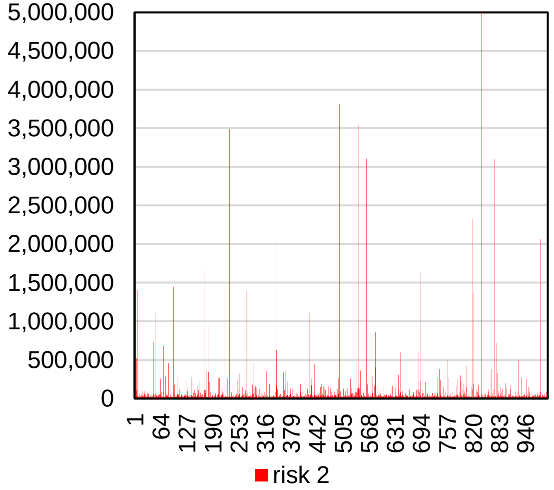
Modelación de riesgos

Riesgo 1

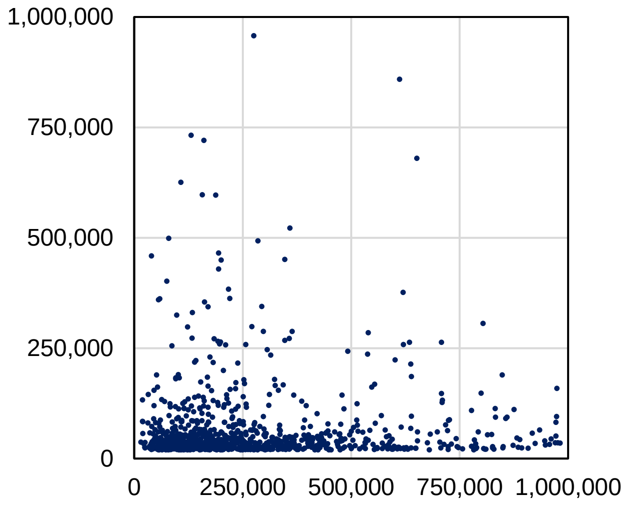


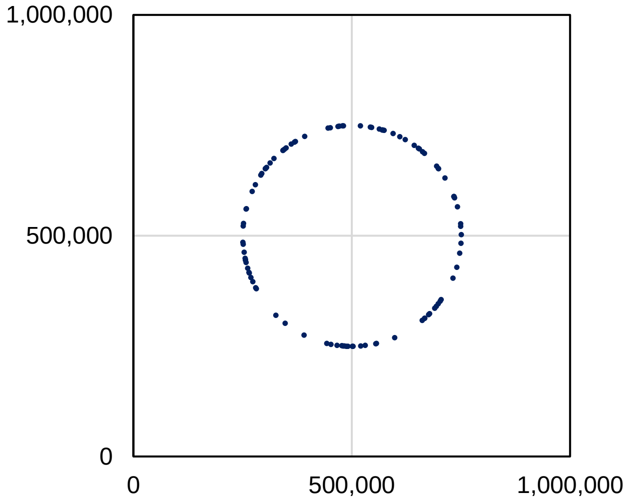


Riesgo 2

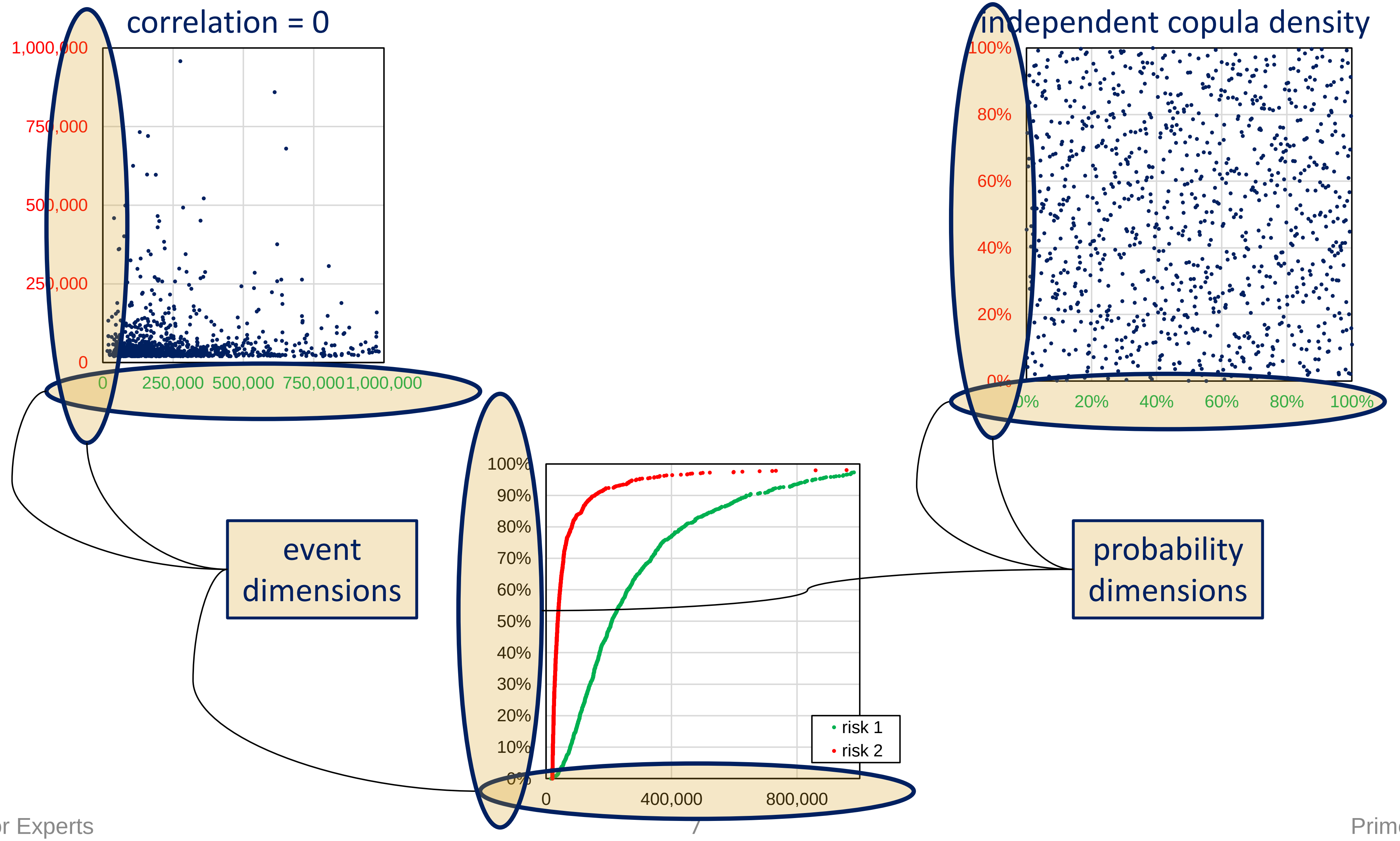


¿Cuánta dependencia?

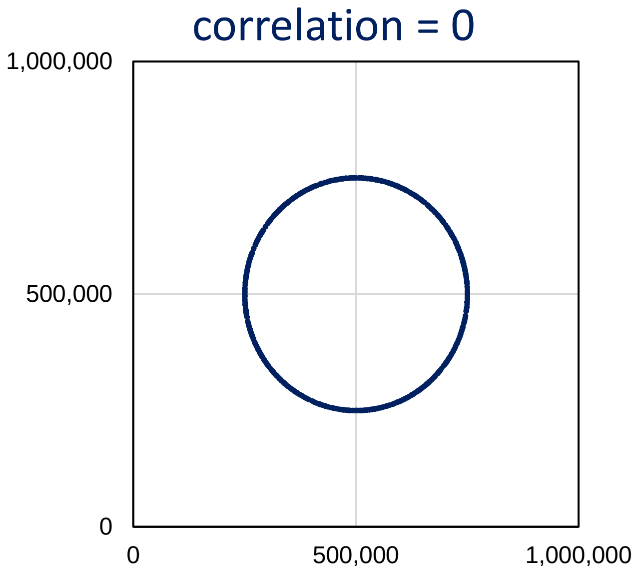


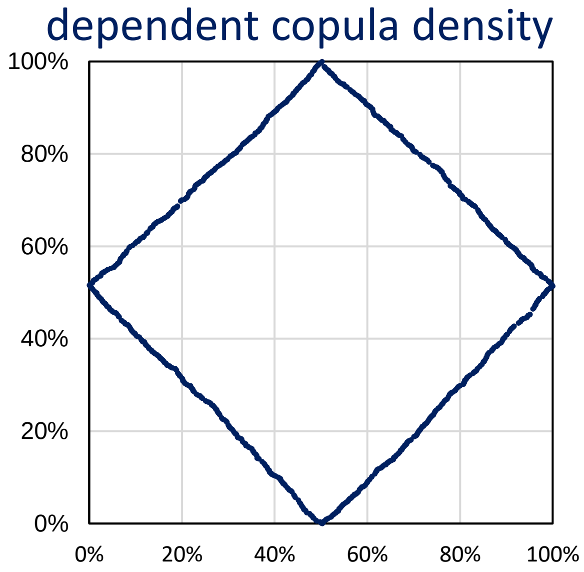


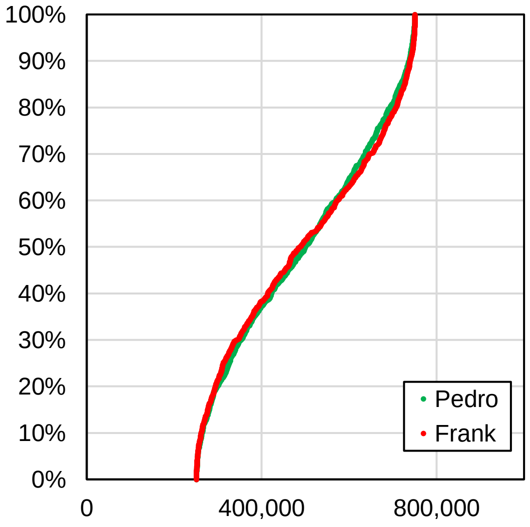
¿Cuánta dependencia?



¿Cuánta dependencia?







Problemas con el uso de correlaciones lineales

Denotemos la correlación lineal de dos variables aleatorias X_1 y X_2 por $\rho(X_1, X_2)$. Debemos tener en cuenta lo siguiente:

- La correlación solo se define si las varianzas de X_1 y X_2 existen.
- Si X_1 y X_2 son independientes, entonces $\rho(X_1, X_2) = 0$; pero si $\rho(X_1, X_2) = 0$, no implica que X_1 y X_2 sean independientes.

Agenda

- Introducción
- Risk aggregation con Cópulas
- Capital allocation

¿Por qué usar cópulas?

- Las cópulas ayudan a comprender la dependencia a un nivel más profundo,
- nos muestran los posibles obstáculos de los enfoques de dependencia que se centran únicamente en la correlación,
- expresan la dependencia en una escala de cuantiles, lo que es más natural en *quantitative risk management* (QRM),
- facilitan un enfoque *bottom-up* para la construcción de modelos multivariados,
- se simulan fácilmente y, por lo tanto, son muy útiles en las aplicaciones de Monte Carlo.

¿Qué es una cópula?

Una copula C es una función de distribución multivariante en R^d con marginales uniformes.
Entonces, una cópula es una función C : $[0,1]^d \rightarrow [0,1]^d$.

- Generamos una variable aleatoria $\tilde{X}$ con una distribución F_X

  $\mathbb{P}[\tilde{X} \leq X] = F_X(X) = u$ $\quad\boxed{u \sim U(0,1) \quad \rightarrow \quad X = \overleftarrow{F}_X(u)}$

- Generamos una 2nd variable aleatoria $\tilde{Y}$ con distribución F_Y

  $\mathbb{P}[\tilde{Y} \leq Y] = F_Y(Y) = v$

independientes

- Generamos una función de distribución conjunta $F_{X,Y}$

  $\mathbb{P}[\tilde{X} \leq X, \tilde{Y} \leq Y] = C(u, v) \leftarrow$ cópula

  $\mathbb{P}[\tilde{Y} \leq Y | \tilde{X} \leq X] = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) = q \quad \Rightarrow \quad v = v(u, q)$

  $\boxed{q \sim U(0,1) \quad \rightarrow \quad Y = \overleftarrow{F}_Y(v)}$

Implementando una cópula

X_1	X_2	$X_1 + X_2$	u	v	$\tilde{X}_1$	$\tilde{X}_2$	$\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$
5	9		50%	40%	5	4	
3	1		30%	10%	3	1	
10	6		100%	100%	10	10	
6	3		60%	70%	6	7	
7	10		70%	50%	7	5	
9	8		90%	90%	9	9	
1	4		10%	20%	1	2	
4	7		40%	30%	4	3	
2	5		20%	60%	2	6	
8	2		80%	80%	8	8	

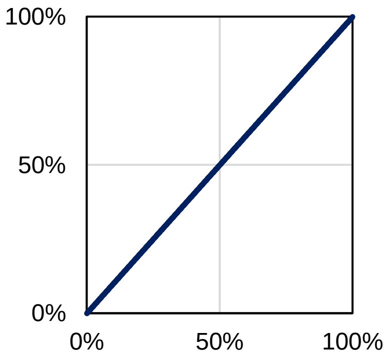
Cópula Comonotónica : dependencia perfecta

- $C(u,v) = \min(u,v)$

- $\frac{\partial}{\partial u} C(u,v) = H(v-u) \quad = \quad q$

$$\Rightarrow \boxed{v = u}$$

- $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v) = \delta(u-v)$



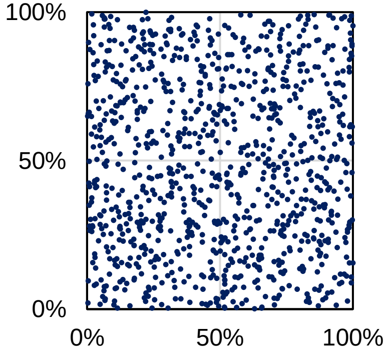
Cópula Independiente

- $C(u,v) = uv$

- $\frac{\partial}{\partial u} C(u,v) = v \quad = \quad q$

$$\Rightarrow \boxed{v = q}$$

- $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v) = 1$



Cópulas Arquimedianas (explícitas): Cópula de Clayton

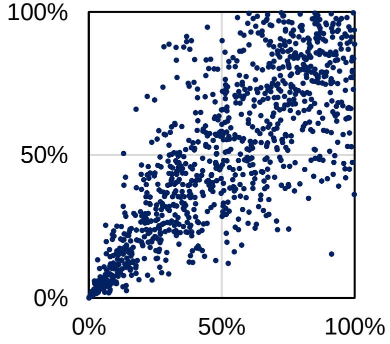
- $C(u,v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}}$

- $\frac{\partial}{\partial u} C(u,v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}} u^{-(\alpha+1)} \quad = \quad q$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \left[1 + \left(q^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} - 1\right) u^{-\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}}$$

independent

- $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v) = (\alpha + 1) \frac{(u^{-\alpha}+v^{-\alpha}-1)^{-\frac{2\alpha+1}{\alpha}}}{u^{\alpha+1} v^{\alpha+1}}$



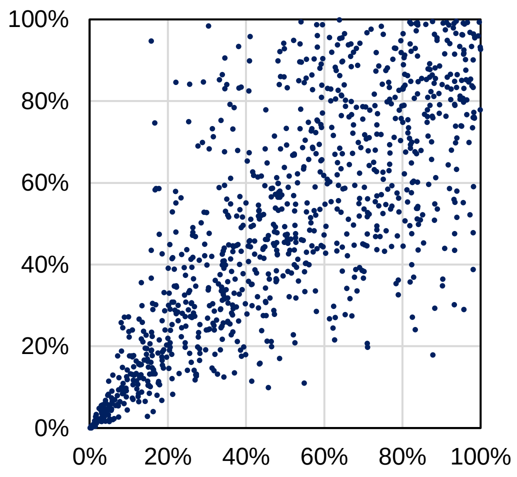
Cópulas elípticas (implícitas)

- Cópula de Gauss
  - $\tilde{A}, \tilde{B}, \ldots \sim$ multivariante normal

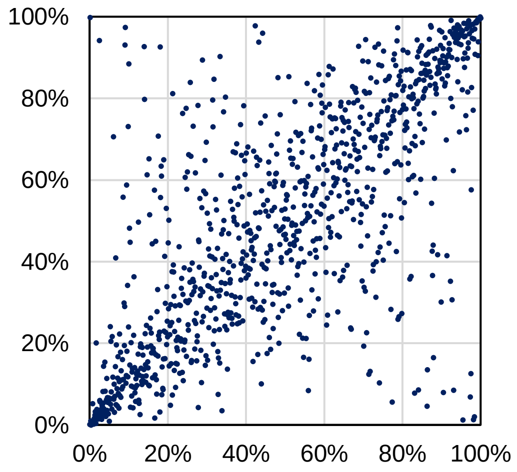
- Cópula Student
  - $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots \sim$ multivariante normal
  - $\chi_\nu^2 \sim$ chi-squared de ν grados de libertad
  - $\tilde{A} = \tilde{a} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{\chi_\nu^2}} \qquad \tilde{B} = \tilde{b} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{\chi_\nu^2}} \qquad \ldots$

Cópulas útiles

- Clayton
  - para riesgos técnicos (ex. property & aviation)
  - muy asimétricos
  - considera independencia de siniestros pequeños
  - considera una dependencia muy fuerte de siniestros grandes
  - tiene dependencia de cola



- Student
  - para riesgos de mercado (ex. equity & equity)
  - simétricos
  - correlación & anti-correlación
  - tiene dependencia de cola



Agenda

- Introducción
- Risk aggregation con Cópulas
- Capital allocation

Capital allocation

Diversificación por *TVaR-principle*

$$
\begin{aligned}
RC &= \mathbb{E}[EC] - \mathbb{E}[EC|EC \leq VaR[EC]] \\
RC_P &= \mathbb{E}[R_P] - \mathbb{E}[R_P|R_P \leq VaR[R_P]] \\
Allocated\ Capital_i &= \mathbb{E}[R_P] - \mathbb{E}[R_P|EC \leq VaR[EC]]
\end{aligned}
$$

Agenda

- Introducción
- Risk aggregation con Cópulas
- Capital allocation

Taller en Risk Aggregation and capital allocation
Con Cópulas